Краткие сообщения ОИЯИ №1[34]-89　　*JINR Rapid Communications No.1[34]-89*
УДК 539.1.01

КУБИЧЕСКИЕ ФОРМЫ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Р.М.Ямалеев

Изложены элементы тригеометрии и алгебры Диксона для форм третьей степени. Предложен принцип построения квантовой механики частиц, движущихся в пространстве тригеометрии.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Cubic Forms and Quantum Mechanics

R.M.Yamaleev

Elements of trigeometry and Dicson algebra for cubic degree are gived. Construction procedure of quantum mechanics of particles moving in the space trigeometry is proposed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Идея построения физической теории, основанной на полилинейных формах, в последнее время была высказана в /6,8-10/. В предлагаемой работе излагается один из возможных путей построения квантовой механики на кубических формах. Следует ожидать, что она будет полезна для описания частиц, обладающих трехзарядовым состоянием, например, кварков /2/ . Предполагается, что частицы, входящие в одну трехзарядовую группу, соотносятся друг с другом, как частицы-античастицы в теории Дирака /1/ . Тогда для описания этих гипотетических частиц необходимо применять формы степени, на одну выше, чем в обычной теории, а именно — кубические формы. Краткости ради, мы без доказательств и строгих определений изложим основные свойства пространства мира триады и обрисуем перспективу построения квантовой механики в этом пространстве.

1. Геометрия триадного мира (тригеометрия)

Она обладает весьма интересными свойствами. В ней существуют аналоги понятий прямой и плоскости, отрезка, угла, треугольника и т.д. Однако "прямая" в тригеометрии проходит через три заданные точки соответственно, только с помощью трех точек можно выделить отрезок на прямой; "треугольник" имеет 4 стороны и 4 угла. Если в геометрии Евклида (как и должно быть в мире диады) имеется только два противоположных друг другу направления, то в мире триады мы имеем три взаимоисключающих друг друга направления. Каждому из направлений в диадном мире присваиваем знаки (+) или (—). Роль трехзначной единицы в триаде играют решения уравнения

$$x^3 - 1 = 0: \ (1, \theta, \theta^2).$$

Пусть R — множество положительных вещественных чисел, включая нуль. Предположим, что каждой точке на прямой тригеометрии можно поставить в соответствие элемент из R. Отрезок на данной прямой задает отношения между тремя точками x_1, x_2, $x_3 \in R$, причем $x_1 > x_2 > x_3$. Определим длину такого отрезка как выражение вида

$$P[x_1, x_2, x_3] := x_1 + \theta x_2 + \theta^2 x_3. \tag{1}$$

При $x_2 = x_3$ выражение (1) переходит в обычное понятие длины отрезка, заключенного между точками (x_1, x_2) на обычной прямой.

В тригеометрии фигура, представляющая собой аналог прямоугольного треугольника, состоит из трех катетов (A, B, D) и гипотенузы (C). Для сторон такой фигуры имеет место соотношение

$$C^3 = A^3 + B^3 + D^3 - 3ABD. \tag{2}$$

Введем три функции:

$$G_0(\alpha, \beta) = 1/\gamma, \quad G_1(\alpha, \beta) = \alpha/\gamma, \quad G_2(\alpha, \beta) = \beta/\gamma, \tag{3}$$

где $\alpha = B/A$, $\beta = D/A$, $\gamma = C/A$. Эти функции являются аналогами функций $\cos\phi$, $\sin\phi$. Очевидно, что

$$G_0^3 + G_1^3 + G_2^3 - 3G_0G_1G_2 = 1.$$

Как показал Гревс/3/, через G_0, G_1, G_2 можно определить функцию экспоненты

$$\mathrm{Exp}(\theta\phi) := G_0 + \theta G_1 + \theta^2 G_2. \tag{4}$$

Формулы сложения параметров при умножении экспонент выглядят следующим образом:

$$\mathrm{Exp}(\theta\phi_1)\mathrm{Exp}(\theta\phi_2) = \mathrm{Exp}(\theta\phi_3),$$

$$\phi_3(\alpha_3,\beta_3) = \phi_1(\alpha_1,\beta_1) + \phi_2(\alpha_2,\beta_2),$$

$$\alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1\beta_2)/\xi, \quad \beta_3 = (\beta_1 + \beta_2 + \alpha_1\alpha_2)/\xi,$$

$$\xi = 1 + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2.$$

Плоскость в тригеометрии есть трехмерное многообразие. На ней могут быть заданы преобразования типа поворота, оставляющие инвариантным кубическую форму:

$$I(3) := p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 - 3p_1p_2p_3. \qquad (5)$$

Эти преобразования удобно задать, используя представление циклических чисел:

$$p_1' + p_2'\theta + p_3'\theta^2 = (G_0 + G_1\theta + G_2\theta^2)(p_1 + p_2\theta + p_3\theta^2). \qquad (6)$$

Обобщение трехмерной кубической формы (5) на случай более высоких измерений эффективнее будет реализовать, используя базис алгебры Диксона/4,5/, поскольку алгебра Диксона по отношению к кубическим формам будет выполнять роль, подобную известной роли алгебры Клиффорда по отношению к квадратичным формам/6/.

2. Алгебра Диксона степени три

Циклическая алгебра с делением степени $N > 2$ была открыта Диксоном/4/, поэтому мы ее будем называть алгеброй Диксона и обозначать символом $\mathrm{Dic}(N)$. Элементы $\mathrm{Dic}(N)$ определяются соотношениями

$$\mathrm{Dic}(N) := \oplus u^n v^m F, \qquad uv = vu\theta, \quad v^N = e, \quad u^N = e,$$

e — единица алгебры, F — коммутативное поле, характеристика которого не является делителем N, θ — примитивный корень уравнения $x^N - 1 = 0$. Как видно, $\mathrm{Dic}(N)$ является обобщением алгебры кватернионов. Как показано в/6/, используя $u, v \in \mathrm{Dic}(N)$, можно получить матричный базис для линеаризации N-форм. Рассмотрим более подробно ближайшего соседа кватернионов — алгебру $\mathrm{Dic}(3)$.

Образующим элементам $u, v \in \mathrm{Dic}(3)$ можно придать следующее матричное представление/7/:

$$u := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta^2 \end{pmatrix}.$$

Матричный базис алгебры $\mathrm{Dic}(3)$, включая единичную матрицу E, состоит из девяти элементов

$$\{\alpha_k\} := \{\alpha_0 = E,\ \alpha_1 = u,\ \alpha_2 = v,\ \alpha_3 = uv,$$

$$\alpha_4 = u^2 v,\ \alpha_5 = \alpha_1^2,\ \alpha_6 = \alpha_2^2,\ \alpha_7 = \alpha_3^2,\ \alpha_8 = \alpha_4^2\}.$$

Система матриц $\{\alpha_k\}$ линейно-независима, полна и $\mathrm{tr}(\alpha_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, 8$. Любая матрица $A(3 \times 3)$, заданная в поле F, может быть разложена в базисе $\{\alpha_k\}$:

$$A = \sum_{k=0}^{9} a_k \alpha_k, \qquad a_k = \mathrm{tr}(\alpha_k^2 A).$$

Пусть даны две матрицы:

$$A_1 := a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4,$$

$$A_2 := b_1\alpha_5 + b_2\alpha_6 + b_3\alpha_7 + b_4\alpha_8.$$

Можно показать, что

$$A_1^3 = f_1(a)E, \quad A_2^3 = f_2(b)E,$$

$f_1(a)$, $f_2(b)$ — кубические формы, причем

$$\det A_1 = f_1(a), \quad \det A_2 = f_2(b).$$

Имеет место следующее

Утверждение

Пусть

$$\pi := \pi_0 + \sum_{k=1}^{8} \pi_k a_k, \quad A(3) = A_1 + A_2$$

и

$$\sum_{i=1}^{4} \pi_i \pi_{i+4} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{4} a_i b_i = 0,$$

$$\pi^3 = E, \qquad I(a,b) := A^3(3).$$

Тогда отображения

$$A'(3) = \pi A(3)\pi^2,$$

$$A''(3) = \pi^2 A(3)\pi$$

оставляют кубическую форму $I(a,b)$ неизменной.

Кубическая форма $I(a,b)$ состоит из координат двух 4-мерных ортогональных (в обычном смысле) подпространств. Именно так обобщается форма (5) при дальнейшем увеличении размерности пространства в тригеометрии.

3. Принципы построения кубической квантовой механики

Кубическая квантовая механика есть квантовая механика частиц, движущихся в пространстве тригеометрии. Это означает, что сохраняющиеся величины в этой квантовой механике должны иметь трилинейную форму, а волновая функция свободного состояния будет описываться экспоненциальной функцией (4). Соответственно меняется понятие унитарности. Триунитарными будем называть операторы, представимые в виде

$$U_1 = \mathrm{Exp}(\theta\phi), \quad U_2 = \mathrm{Exp}(\theta^2\phi), \quad U_3 = \mathrm{Exp}(\phi),$$

так что

$$U_1U_2U_3 = E,$$

E — единичный оператор.

Фундаментальными элементами квантовой механики являются угловой момент, спин и операторы "рождения и уничтожения" частиц. Посмотрим, как выглядят аналоги этих понятий в кубической квантовой механике.

Трилинейным антикоммутатором трех заданных операторов b_1, b_2,b_3 будем называть сумму вида:

$$\{b_1, b_2, b_3\} := b_1b_2b_3 + b_2b_3b_1 + b_3b_1b_2.$$

Соответственно трилинейный коммутатор будет иметь вид:

$$[b_1, b_2, b_3] := b_1b_2b_3 + \theta b_2b_3b_1 + \theta^2 b_3b_1b_2.$$

Коль скоро мы ввели понятие трилинейного антикоммутатора, то по аналогии с обычным осциллятором оператор Гамильтона трилинейного осциллятора определим следующим образом:

$$H(3) := \frac{1}{3}\{b_1, b_2, b_3\}.$$

Пусть оператор $N := b_1b_2b_3$ есть оператор числа частиц. Тогда действие операторов b_1, b_2 , b_3 на заданное состояние можно определить с помощью формул:

$$b_1\Phi_n = \sqrt[3]{n+1}\ \Phi_{n+1},$$

$$b_2\Phi_n = \sqrt[3]{n+\theta+1}\ \Phi_{n+\theta},$$

$$b_3\Phi_n = \sqrt[3]{n}\ \Phi_{n+\theta^2}\ .$$

Пульзуясь этими формулами, легко найти спектры операторов $\hat{N}$ и $H(3)$:

$$N\Phi_n = n\Phi_n, \qquad H(3)\Phi_n = \left(n + \frac{2+\theta^2}{3}\right)\Phi_n.$$

Здесь роль повышающего данное состояние оператора играет $b^+ := b_1$, роль понижающего оператора $-b^- := b_2b_3$, причем

$$[b^+, b^-] = 1.$$

Операторы триспина определяются через элементы алгебры Dic(3) :

$$\Sigma_k = \theta\hbar\alpha_k/3.$$

Соответствующие аналоги операторов углового момента можно получить, используя бозонные операторы b_k^+, b_i^- $(i,k = 1,\ 2,\ 3)$

$$[b_k^+, b_i^-] = \delta_{ki}, \qquad [b_k^{\pm}, b_i^{\pm}] = 0.$$

При этом триугловой момент принимает вид:

$$J_k = \theta\hbar\ \Sigma_k^{(np)} b_n^+ b_p^-.$$

Поскольку мы предполагаем, что движение частицы происходит в пространстве тригеометрии, то зависимость между энергией и импульсом должна иметь форму, инвариантную относительно преобразований (6). Прямым аналогом оператора энергии уравнения Паули в этом случае является выражение вида

$$H = \frac{1}{3m^2}\Big(\sum_{k=1}^{8} \alpha_k p_k\Big)^3, \qquad \sum_{i=1}^{4} p_i p_{i+4} = 0. \tag{7}$$

Аналогом релятивистского соотношения между энергией, импульсом и массой является кубическая форма:

$$(\mathcal{E}/c^2)^3 = \Big(\sum_{k=1}^{8} \alpha_k p_k\Big)^3 + (mc)^3. \tag{8}$$

Выражение $\mathcal{E}_0 = mc^2$ в этом случае будет соответствовать энергии покоя. При $c \to \infty$ (8) переходит в (7). Соответственно можно написать аналоги уравнений Клейна-Гордона и Дирака /8/.

В квантовой теории поля электрически заряженные частицы описываются комплексными волновыми функциями. В кубической квантовой механике трехзарядовые состояния будут описываться числами Гревса. Согласно теории Дирака, частицам и античастицам соответствуют заряды и массы покоя различных знаков.

В кубической квантовой механике заряды и массы покоя частиц, соотносящихся между собой как античастицы, будут иметь множители 1, θ, θ^2. Одна из возможных областей применения кубической квантовой механики — это адронная физика, фундаментальные объекты которой — кварки, обладают трехцветовым состоянием.

Литература

1. Дирак П. — Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
2. Индурайн Ф. — Квантовая хромодинамика. М.: Мир, 1986.
3. Creaves Ch. — On algebraical triplets. Proc. Irish. Acad., 1847, t. 3, p. 51.
4. Пирс Р. — Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.
5. Dicson L.E. — Algebren und ihre Zahlensysteme. Zurich, 1927.
6. Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ Р5-87-766, Дубна, 1987.
7. Семерджиев Х.И., Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ Р5-88-834, Дубна, 1988.
8. Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ Р2-88-147, Дубна, 1988.
9. Finkelstein D. —Phys. Rev. Lett., 1986, 56(15), 1532.
10. Rausch M. de Traunbenberg, Fleury N. — Beyond spinors. Communication of the Centre de Recherches Nucleaires Strasbourg (CRN/HE 88-04), 1988.

Рукопись поступила 20 января 1989 года.